PART2 逆関数の微分法，x^r の導関数

要点整理と公式

要点 ① 逆関数の微分法

微分可能な関数 $y=f(x)$ が逆関数 $y=f^{-1}(x)$ をもつとき

$$x=f(y)$$

両辺を x で微分すると $1=\dfrac{d}{dx}f(y)$

ここで合成関数の微分法を用いると

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

よって $1=\dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}$

したがって，次の公式が得られる。

逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

(ex) $y=\sqrt{x}$ の導関数を，逆関数の微分法の公式を用いて求める。

$y=x^{\frac{1}{2}}$ より $x=$ 　　　　$\dfrac{dx}{dy}=2y$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

要点 ② x^r の導関数

r が有理数のとき，$(x^r)'=rx^{r-1}$ が成り立つことを示す。

$r=\dfrac{m}{n}$ (n は正の整数，m は整数)とする。

$y=x^r$ すなわち $y=x^{\frac{m}{n}}$ のとき　$y^n=x^m$

両辺を x で微分すると $\dfrac{d}{dx}y^n = mx^{m-1}$

ここで合成関数の微分法を用いると $\dfrac{d}{dx}y^n = \dfrac{d}{dy}y^n \cdot \dfrac{dy}{dx} = ny^{n-1} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

よって $ny^{n-1} \cdot \dfrac{dy}{dx} = mx^{m-1}$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{x^{\frac{m}{n}(n-1)}} = \frac{m}{n} \cdot x^{m-1-\left(m-\frac{m}{n}\right)} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

ゆえに $\left(x^r\right)' = rx^{r-1}$

x^r の導関数

r が有理数のとき　$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}$

(ex) $y = \sqrt{x}$ の導関数について

$$y = x^{\frac{1}{2}} \text{ より } y' = \quad x^{\frac{1}{2}} \quad = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2 (1) 逆関数の微分法の公式を用いて，関数 $y=\sqrt[3]{x}$ を微分せよ。

(2) 次の関数を微分せよ。

(i) $y=\sqrt[5]{x^2}$ (ii) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (iii) $y=\sqrt{2x+3}$

Point Pickup

逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

x^r の微分法

r が有理数のとき $(x^r)'=rx^{r-1}$

第 8 講　PART2 確認問題

1　逆関数の微分法の公式を用いて, 関数 $y=\sqrt[5]{x}$ を微分せよ。

答えは下の①～⑥のうちから選べ。

$y=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$ より, $x=$ [ア]

$$\frac{dx}{dy}=\text{[イ]}$$

よって, $\dfrac{dy}{dx}=$ [ウ]

① $5y$　② y^4　③ $5y^4$

④ y^5　⑤ $\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$　⑥ $\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

2　関数 $y=\sqrt[3]{x^4}$ を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

$y'=$ [エ]

① $\sqrt[3]{x}$　② $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

③ $\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}}$　④ $\dfrac{3}{4\sqrt[3]{x}}$

3　関数 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

$y'=$ [オ]

① $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$　② $-\dfrac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$

③ $\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$　④ $-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

4 関数 $y=\sqrt{2x+5}$ を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

$y'=$ カ

① $\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$　　② $\dfrac{2}{\sqrt{2x+5}}$

③ $-\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$　　④ $\dfrac{1}{2\sqrt{2x+5}}$

[MEMO]

PART2 逆関数の微分法，x^r の導関数

2 (1) 逆関数の微分法の公式を用いて，関数 $y=\sqrt[3]{x}$ を微分せよ。

(2) 次の関数を微分せよ。

(i) $y=\sqrt[5]{x^2}$　(ii) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　(iii) $y=\sqrt{2x+3}$

[解答]

(1) $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ より $x=y^3$　$\dfrac{dx}{dy}=3y^2$

よって $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{3y^2}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(2)(i) $y'=\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

(ii) $y'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}\left(=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$

(iii) $y'=\left\{(2x+3)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\dfrac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+3)'=\dfrac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1　[正解] ア：④，イ：③，ウ：⑥

[解説]

$y=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$ より，$x=\boldsymbol{y}^{5}$

$$\frac{dx}{dy}=\boldsymbol{5y}^{4}$$

よって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^{4}}\ \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{5}\sqrt[5]{\boldsymbol{x}^{4}}}$$

［A］　逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2　[正解] エ：②

[解説]

$$y'=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\ \text{[B]}$$

$$=\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}$$

［B］　r が有理数のとき，

$(x^{r})'=rx^{r-1}$

3　[正解] オ：④

[解説]

$$y'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\ \text{[C]}$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{4}}}$$

$$=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3x}\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}$$

［C］　r が有理数のとき，

$(x^{r})'=rx^{r-1}$

4 **[正解]** カ：①

[解説]

$$y'=\left\{(2x+5)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$=\frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+5)' \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2x+5}}}$$

[D]　r が有理数のとき，
$(x^r)'=rx^{r-1}$